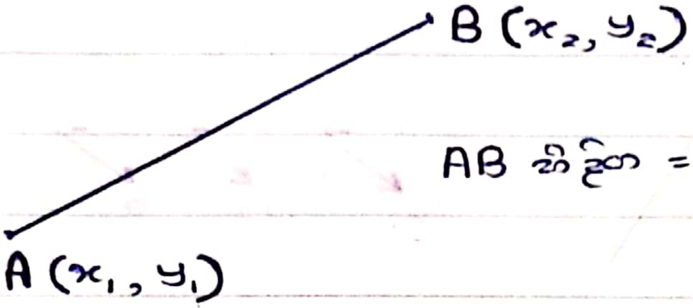
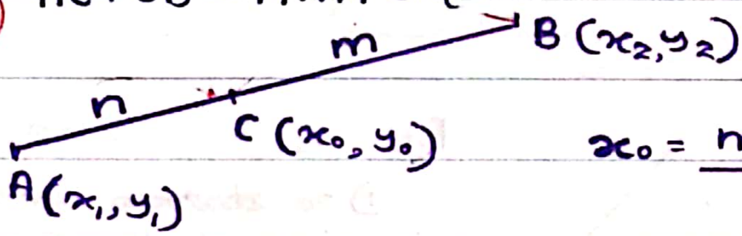
බණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතිය

සරල රේඛාව



AB හි දිග $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

AC : CB = n : m විටදී,

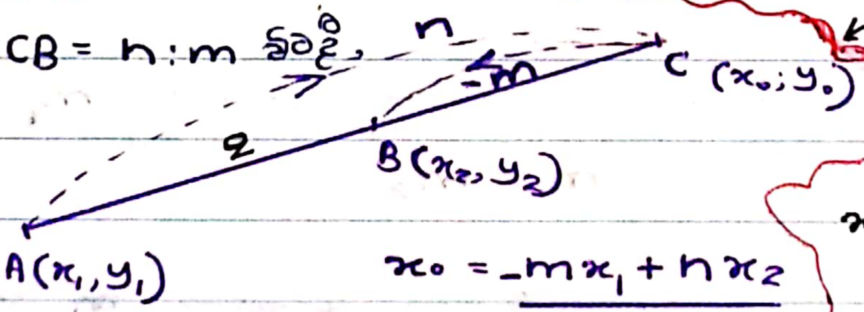


$$x_0 = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}$$

$$y_0 = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}$$

$$C \equiv [x_0, y_0]$$

AC : CB = n : m විටදී,



$$x_0 = \frac{-mx_1 + nx_2}{-m+n}$$

$$C \equiv [x_0, y_0]$$

$$y_0 = \frac{-my_1 + ny_2}{-m+n}$$

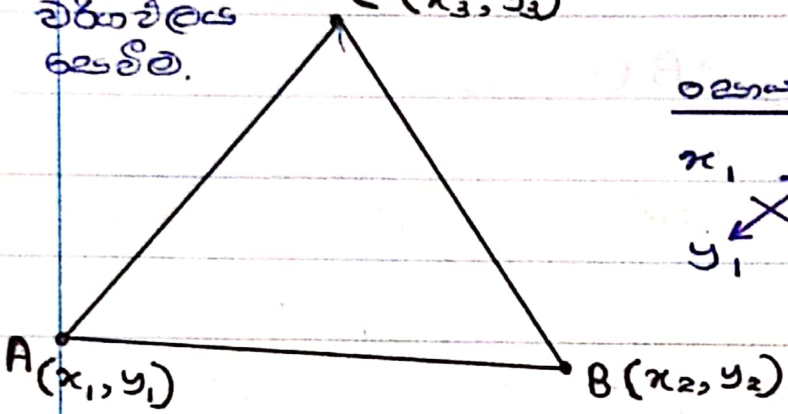
මෙය ඉතා ක්‍රමයටමද විසඳිය හැක.

$$x_2 = \frac{l x_0 + mx_1}{m + l}$$

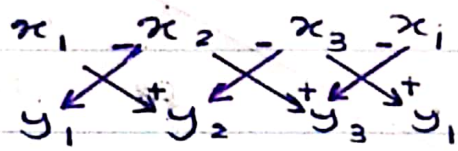
x_0 උක්ත කල හැකිය.

Scanned with CamScanner

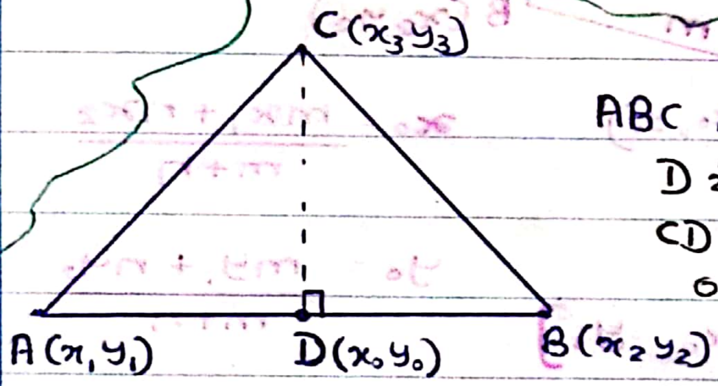
ABC Δයේ වර්ගඵලය සෙවීම.



මතක ඉසුරු



ABC Δයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}\left|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3\right|$



ABC Δයේ වර්ගඵලය සෙවීමට, D හි ඛණ්ඩාංක සොයා CD රේඛාවේ දිග හා AB රේඛාවේ දිග සොයා ගත යුතු වේ. ඉන් පසුව $\frac{1}{2} \times |AB| \times |CD|$ මගින් වර්ගඵලය ලබා ගත හැකි වේ.

සමාන්තර රේඛා දෙකක අනුක්‍රමණ m_1 හා m_2 නම්,

$$m_1 = m_2$$

ලම්බක රේඛා දෙකක අනුක්‍රමණ m_1 හා m_2 නම්,

$$m_1 m_2 = -1$$

* ලක්ෂ්‍ය 2 ක ඛණ්ඩාංක දී ඇති විට,

$A \equiv (x_1, y_1)$

$B \equiv (x_2, y_2)$

රේඛාවේ සමීකරණය,

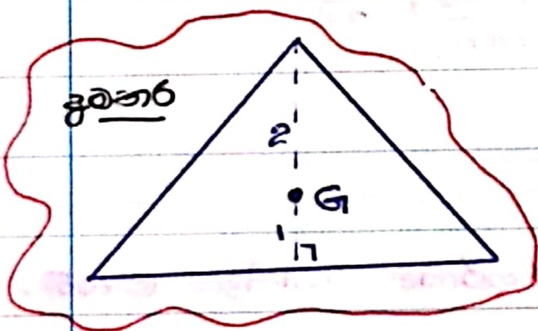
$$\text{අනුක්‍රමණය } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* එක් ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක හා m දී ඇති විට,

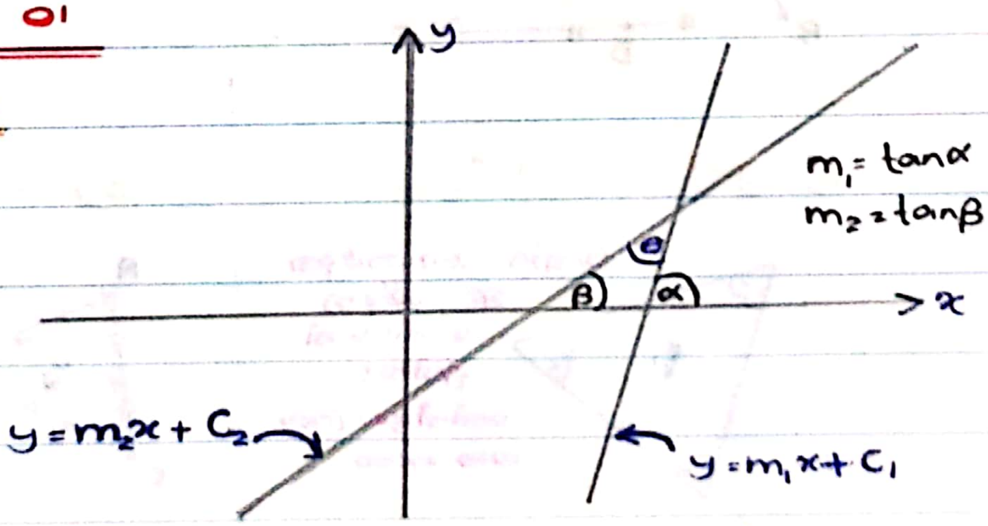
රේඛාවේ සමීකරණය,

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$



ප්‍රශ්නය 01

සාධනය



Scanned with CamScanner

$$\theta + \beta = \alpha$$

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

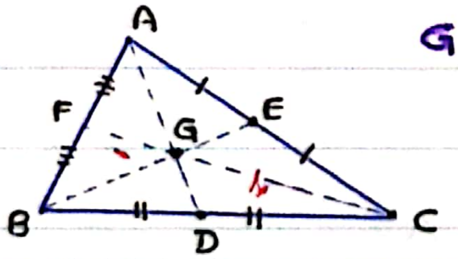
$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

* ∴ ඡේදනය වන සරල රේඛා දෙකෙහි අතර සුළු කෝණය θ නම් $[\theta \neq \pi/2]$ වන විට,

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$ වේ.

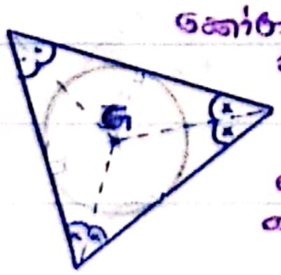
1) ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය / ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය / කේන්ද්‍රකය



G මගින් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ලැබේ.

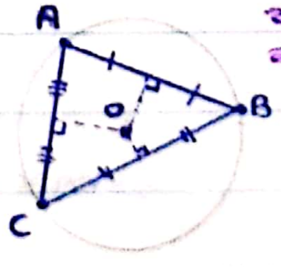
AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1

2) අන්තඃ කේන්ද්‍රය



කෝණ සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂයෙහි අන්තඃ කේන්ද්‍රය ලබා ගත හැක

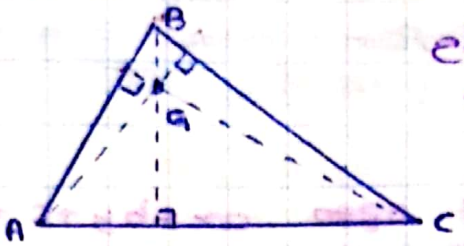
3) පරි කේන්ද්‍රය



පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය පරිකේන්ද්‍රය වේ.

Scanned with CamScanner

4) ලම්බ කේන්ද්‍රය

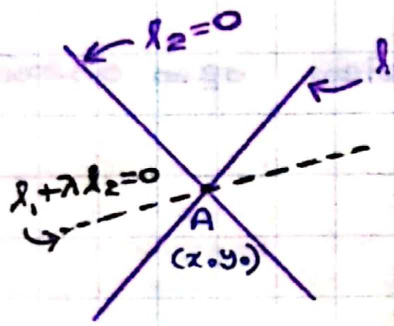


උච්චයක් යනු ශීර්ෂයක සිට පාදයකට ඇඳි ලම්බකය වේ.
ත්‍රිකෝණයක උච්චයන් එක ලක්ෂ්‍යයක දී හමු වේ. එය ලම්බ කේන්ද්‍රය ලෙස හැඳින්වේ.

ප්‍රමේයය 02

(ඉගැන්වීමේදී $l_1+\lambda l_2=0$ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක් බවත් පෙන්විය යුතු වේ.)

සරල රේඛා දෙකක ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය ______ ...



සාධනය

$l_1 \equiv ax+by+c=0$ ද

$l_2 \equiv px+qy+r=0$ ද ලෙස ගනිමු.

ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $A(x_0, y_0)$ ලෙස ද ගනිමු.

එවිට, $ax_0+by_0+c=0$

$px_0+qy_0+r=0$ වේ.

$l_1+\lambda l_2=0$, $A(x_0, y_0)$ හරහා යයි නම්,

$ax_0+by_0+c+\lambda(px_0+qy_0+r)=0$ විය යුතුය.

$$\text{L.H.S.} = \underbrace{ax_0+by_0+c}_{0} + \lambda\underbrace{(px_0+qy_0+r)}_{0}$$

$$= 0+\lambda(0)$$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ $l_1+\lambda l_2=0$, $A(x_0, y_0)$ හරහා යයි.

තවද $l_1+\lambda l_2=0$ සලකමු.

$ax+by+c+\lambda(px+qy+r)=0$

$(a+p\lambda)x+(b+q\lambda)y+c+r\lambda=0$

මෙය x හා y හි ඒකජ සමීකරණයකි.

$\therefore$ මෙමගින් සරල රේඛාවක් නිරූපණය වේ.

Scanned with CamScanner

ප්‍රමේයය 03

ලක්ෂ්‍ය දෙකක් සරල රේඛාවක එකම පැත්තේ හෝ දෙපැත්තේ පිහිටීම

$P(x_1,y_1)$ හා $Q(x_2,y_2)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක $ax+by+c=0$ සරල රේඛාවේ එකම පැත්තේ හෝ දෙපැත්තේ පිහිටීම, $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) \gtrless 0$ අනුව සිදුවේ.

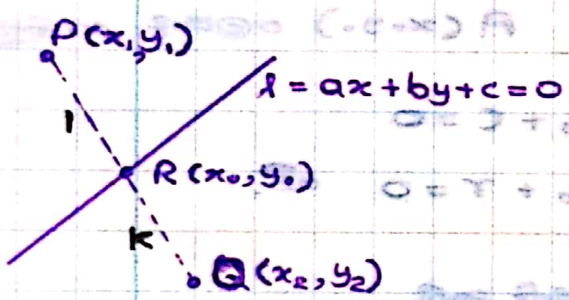
එනම්,

$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$ නම් ලක්ෂ්‍ය දෙක රේඛාවේ එකම පැත්තේ පිහිටයි.

$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) < 0$ නම් ලක්ෂ්‍ය දෙක රේඛාවේ දෙපැත්තේ පිහිටයි.

සාධනය

* මෙහි PQ රේඛාව $l=0$ රේඛාවෙන් බෙදෙන අනුපාතය සොයා එම අනුපාතය (k) ධන නම්, P හා Q දෙපැත්තේ ද k ඍණ නම් P හා Q එකම පැත්තේ ද වේ.



PQ හා $l=0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය $R\equiv(x_0,y_0)$ ලෙස ද, එවිට PQ රේඛාව R මගින් අභ්‍යන්තරව $1:k$ අනුපාතයට බෙදේ යැයි ද ගනිමු.

$$x_0 = \frac{kx_1+x_2}{(1+k)} \qquad y_0 = \frac{ky_1+y_2}{(1+k)}$$

(x_0, y_0) , $l=0$ මත නිසා,

$$ax_0+by_0+c=0$$

$$a\left[\frac{kx_1+x_2}{(1+k)}\right] + b\left[\frac{ky_1+y_2}{(1+k)}\right] + c = 0$$

$$a(kx_1+x_2)+b(ky_1+y_2)+c(1+k)=0$$

$$k(ax_1+by_1+c)+ax_2+by_2+c=0$$

$$k = \frac{-(ax_2+by_2+c)}{(ax_1+by_1+c)}$$

$$k = -\frac{(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)}{(ax_1+by_1+c)^2}$$

හරය පූර්ණ වර්ගයක් නිසා හරය (+) වේ.

$K > 0$ නම් R මගින් P හා Q අභ්‍යන්තරව බෙදෙයි. එවිට ලක්ෂ්‍ය දෙක රේඛාවේ දෙපැත්තේ පිහිටයි.

$-(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$ නම්, ලක්ෂ්‍ය 2 ක දෙපැත්තේ පිහිටයි.

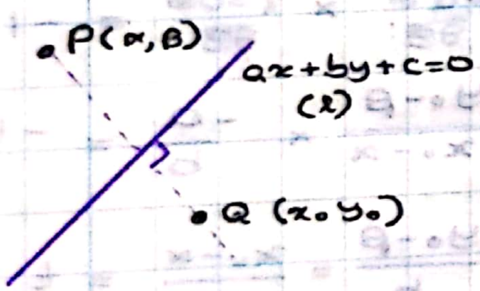
$(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) < 0$ නම්, ලක්ෂ්‍ය දෙක රේඛාවේ දෙපැත්තේ පිහිටයි.

ප්‍රමේයය 04

ලක්ෂ්‍යයක සිට රේඛාවකට ඇඳි ලම්බකයට වන අඩියේ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක පරාමිතිකව දැක්වීම

(α,β) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බකයේ අඩියේ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(\alpha+at, \beta+bt)$ ලෙස ලිවිය හැක.

සාධනය



$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$PQ \perp l=0$

අනු: PQ × අනු: $l=0 = -1$

$$\frac{y_0-\beta}{x_0-\alpha} \times -\frac{a}{b} = -1$$

$$\frac{y_0-\beta}{b} = \frac{x_0-\alpha}{a} = t$$

(t යනු පරාමිතියකි.)

$y_0 - \beta = bt$

$y_0 = \beta + bt$

$x_0 = \alpha + at$

∴ අඩියේ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක,

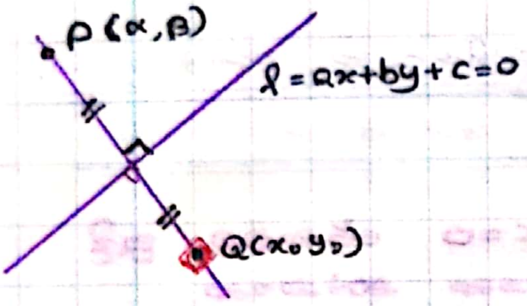
$(\alpha+at, \beta+bt)$

ප්‍රමේයය 05

සරල රේඛාවක් තුළින් ලක්ෂ්‍යයක ප්‍රතිබිම්බය

$ax+by+c=0$ රේඛාව තුළින් $P\equiv(\alpha,\beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය වන්නේ $(\alpha+at,\ \beta+bt)$ වේ. මෙහි,

$$t = -\frac{2(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$$ වේ.



සාධනය

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$PQ \perp l=0$ නිසා,

$$\text{PQ හි අනු:} \times \text{l=0 හි අනු:} = -1$$

$$\frac{y_0-\beta}{x_0-\alpha} \times -\frac{a}{b} = -1$$

$$\frac{y_0-\beta}{b} = \frac{x_0-\alpha}{a} = t$$

(t යනු පරාමිතියකි)

$$y_0 = \beta + bt$$

$$x_0 = \alpha + at$$

$$Q \equiv (\alpha+at,\ \beta+bt)$$

PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R ලෙස ගනිමු.

$$R = \left[\frac{\alpha+\alpha+at}{2},\ \frac{\beta+\beta+bt}{2}\right]$$

$$R = \left[\frac{2\alpha+at}{2},\ \frac{2\beta+bt}{2}\right]$$

R ලක්ෂ්‍යය $l=0$ හි පිහිටන නිසා,

$$a\left[\frac{2\alpha+at}{2}\right] + b\left[\frac{2\beta+bt}{2}\right] + c = 0$$

$$a(2\alpha+at) + b(2\beta+bt) + 2c = 0$$

$$t(a^2+b^2) = -2(a\alpha+b\beta+c)$$

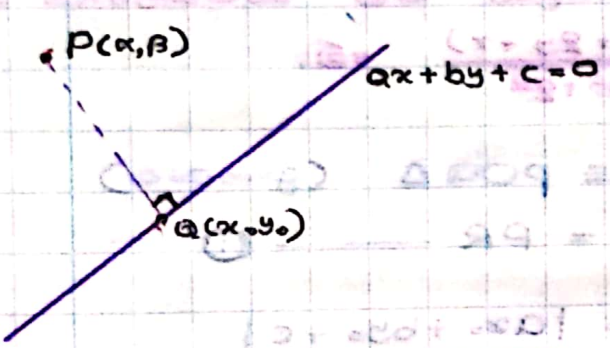
$$t = \frac{-2(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$$

Scanned with CamScanner

ප්‍රමේයය 06

ලක්ෂ්‍යයක සිට රේඛාවකට ඇති ලම්භක දුර

$P = (\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax+by+c=0$ රේඛාවට ඇති ලම්භක දුර මඟින් $\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ වේ.



සාධනය

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$PQ \perp l=0$ නිසා,

$$PQ \text{ හි අනු.} \times l=0 \text{ හි අනු.} = -1$$

$$\frac{y_0-\beta}{x_0-\alpha} \times -\frac{a}{b} = -1$$

$$\frac{y_0-\beta}{b} = \frac{x_0-\alpha}{a} = t$$

t යනු පරාමිතියකි.

$$y_0 = \beta + bt$$

$$x_0 = \alpha + at$$

$$Q \equiv (\alpha+at, \beta+bt)$$

Q ලක්ෂ්‍යය $ax+by+c=0$ මත පිහිටන නිසා,

$$a(\alpha+at) + b(\beta+bt) + c = 0$$

$$t(a^2+b^2) = -(a\alpha+b\beta+c)$$

$$t = -\frac{(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$$

$$PQ \text{ හි දිග} = \sqrt{(\alpha+at-\alpha)^2 + (\beta+bt-\beta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2t^2+b^2t^2}$$

$$= |t|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \left| -\frac{(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2} \right| \sqrt{a^2+b^2}$$

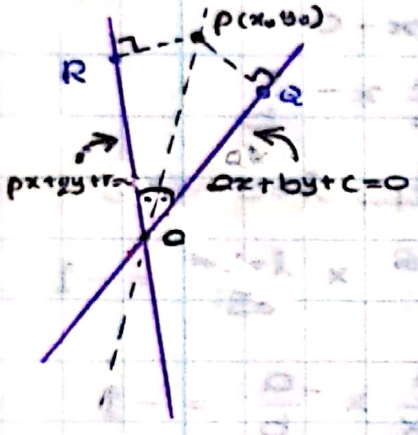
$$= \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ප්‍රමේයය 07

ඡේදනය වන සරල රේඛා දෙකේ යුගල කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$ax+by+c=0$ හා $px+qy+r=0$ ඡේදනය වන සරල රේඛා යුගල කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණය වන්නේ

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{(px+qy+r)}{\sqrt{p^2+q^2}}$$ වේ.



$POR\,\Delta \equiv POQ\,\Delta$ (ඛ.කෝ.පා)

$PQ = PR$ ——— (1)

$$PQ = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$PR = \frac{|px_0+qy_0+c|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

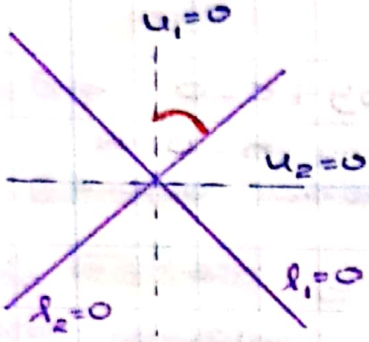
$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|px_0+qy_0+c|}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

$$\frac{(ax_0+by_0+c)}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{(px_0+qy_0+c)}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

(x_0, y_0) වෙනුවට (x, y) ආදේශයෙන්.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{(px+qy+c)}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය හඳුනා ගැනීම



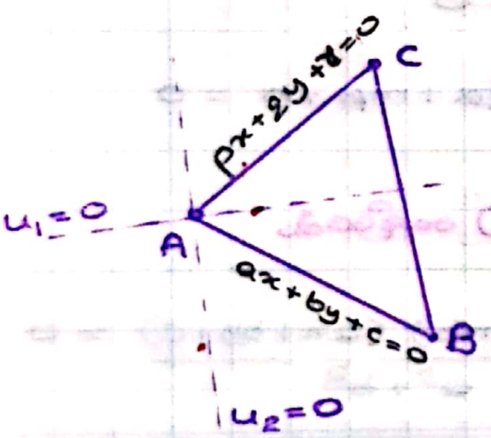
* දී තිබෙන රේඛා 2 න් එකක් තෝරා ගන්න. ($l_1=0$ තෝරා ගනී.)

* කෝණ සමච්ඡේදක 2 න් එකක් තෝරා ගන්න. ($u_1=0$ තෝරා ගනී.)

* දැන් $l_1=0$ හා $u_1=0$ රේඛා අතර සුළු කෝණය θ නම්, $\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ මගින් $\tan\theta$ සොයා ගන්න.

* $\tan\theta < 1$ නම්, $\theta < 45^\circ$ වේ. එවිට තෝරාගත් ඉන්නේ සුළු කෝණ සමච්ඡේදකයයි. අනෙක මහා කෝණ සමච්ඡේදකය වේ. $\tan\theta > 1$ නම් තෝරා ගත් ඉන්නේ මහා කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකය වෙන් කර ගැනීම.



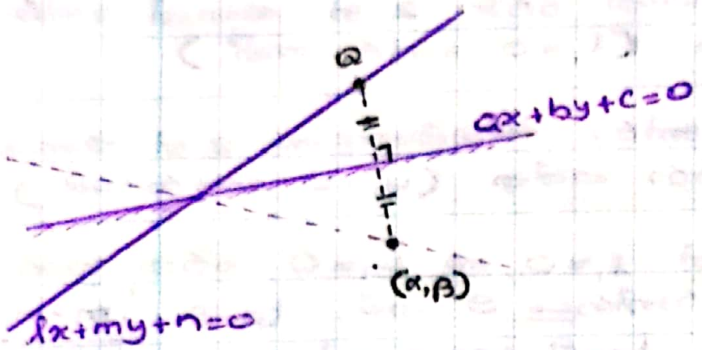
* AB හා AC පාද වල සමීකරණ උපයෝගී කර ගනිමින් $\hat{A}$ හි සමච්ඡේදක දෙක සොයා ගන්න.

* අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය $u_1=0$ නම් එම සමච්ඡේදකයේ දෙපස B හා C පිහිටිය යුතුය.

* බාහිර සමච්ඡේදකය $u_2=0$ නම් එම රේඛාවෙන් එකම පැත්තේ B හා C පිහිටිය යුතුය.

Scanned with CamScanner

රේඛාවක් තුළින් රේඛාවක ප්‍රතිබිම්බයක් ලබා ගැනීම.



* $ax+by+c=0$ තුළින් $lx+my+n=0$ හි ප්‍රතිබිම්බය සොයමු.

* (α,β) යනු ප්‍රතිබිම්බ රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු.

* එවිට $ax+by+c=0$ තුළින් (α,β) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය $Q \equiv (\alpha+at, \beta+bt)$, $lx+my+n=0$ රේඛාව මත පිහිටයි.

$$t = -\frac{2(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$$

$$l(\alpha+at) + m(\beta+bt) + n = 0$$

$$(la+mb)t + l\alpha + m\beta + n = 0$$

$$-\frac{2(a\alpha+b\beta+c)(la+mb)}{a^2+b^2} + l\alpha + m\beta + n = 0$$

(α,β) වෙනුවට (x,y) යෙදීමෙන්,

$$(lx+my+n) - \frac{2(la+mb)(ax+by+c)}{a^2+b^2} = 0$$

Scanned with CamScanner